Gödelovi teoremi nepotpunosti

Marko Raduka

30. listopad 2007.

Sadržaj:

Einstein has often told me that in the late years of his life he has continually sought Gödel's company, in order to have discussions with him. Once he said to me that his own work no longer meant much, that he came to the Institute merely "to have the privilege of walking home with Gödel".

Oskar Morgenstern[1]

1 Uvod

Cilj ovog rada jest prikazati i protumačiti dva Gödelova teorema o nepotpunosti, vrijeme u kojem su nastali, njihova ograničenja te njihov značaj, sve u dosta pojednostavljenom obliku, kako bi bili razumljivi što širem krugu čitatelja. Ti teoremi predstavljaju jedan od vrhunaca matematičke i logičke misli dvadesetog stoljeća, a njihov tvorac, Kurt Gödel priznat je kao jedan od najvećih umova čovječanstva uopće. Ipak, s obzirom na njihovu značajnost, tim se teoremima danas pridaje vrlo malo pažnje. Jedan od razloga zasigurno je mali utjecaj tih teorema na praksu velikog dijela matematičara.

Čitav rad strukturiran je tako da čitatelju pruži postepen uvod u cjelokupnu tematiku, od povijesnog okruženja do objašnjenja samih Gödelovih teorema. U drugom poglavlju prikazana je kratka biografija Kurta Gödela. Treće poglavlje bavi se povijesnim okruženjem u kojem su nastali teoremi nepotpunosti. To okruženje sigurno je uvelike utjecalo na pojavu, formulaciju i sam dokaz teorema. Četvrto poglavlje razmatra teorijsku podlogu koja je potrebna da bi se teoremi mogli shvatiti, od osnova aksiomatizacije logike prvog reda i teorija s jednakošću, do pojmova kao što su izračunljivost i rekurzivnost. U petom poglavlju dani su iskazi i kratke skice dokaza prvog i drugog teorema o nepotpunosti, a u zaključku se navode razlozi značajnosti teorema, neke njihove posljedice te pregled Gödelovih interesa u drugom dijelu života.

[1] (15), str. 57.

Popis literature navodi samo knjige i članke koji su se koristili pri pisanju ovog rada. Međutim, u većini tih knjiga (posebno u (10) i (15)) postoje vrlo dobre bibliografije o čitavom tom području, tako da zainteresiraniji čitatelji mogu proširiti svoje znanje i razumijevanje. Isto tako, na kraju su navedene brojne internet stranice na kojima postoji pregršt podataka o cjelokupnom području.

2 Biografija

Austrijski matematičar i logičar, Kurt Gödel[2], rođen je u Brünnu, Austro-Ugarska (danas Brno, Češka) 28.04.1906. godine. U obitelji su ga zvali Gospodin Zašto (*Der Herr Warum*), zbog njegove nezasitne znatiželje. Osnovnu i srednju školu pohađa u Brnu. U početku školovanja, najveći su Gödelov interes bili jezici, međutim, pred kraj srednje škole počinje se sve više i više zanimati za povijest i matematiku. Sa osamnaest godina pridružuje se svom bratu Rudolfu na Sveučilištu u Beču. Do tada je već savladao sveučilišno gradivo iz matematike.

Tokom prvih godina studija (u početku je studirao teorijsku fiziku) sudjeluje u radu Bečkog kruga[3] sa Moritzom Schlickom[4], Rudolfom Carnapom[5] i Hansom Hahnom[6]. Nakon dvije godine studiranja fizike, počinje se zan-

[2] Za vrlo detaljnu biografiju vidi (15), str. 25-99.

[3] Bečki krug skupina je filozofa koji su se okupili oko Moritza Schlicka 1922. godine, kada je počeo raditi na Sveučilištu u Beču. Većina pripadnika Bečkog kruga bili su članovi Društva Ernsta Macha (Schlick je bio predsjednik društva). Svi članovi kruga, s iznimkom Gödela, imali su zajedničke filozofske stavove. Smatrali su da je čitav svijet karakteriziran sa dvije značajke. Prvo, svijet je empiricistički i pozitivistički: znanje postoji samo kroz iskustvo. Drugo, koncept svijeta kao znanstvenog, karakteriziran je određenom metodom - logičkom analizom.

Cilj Bečkog kruga bio je formiranje jedinstvene znanosti. Jedinstvena znanost konstrukt je sistema u kojem je svaki sud sveden na koncepte nižeg nivoa, sve do neposrednog iskustva.

Više na (XVIII)

[4] Moritz Schlick (1882. - 1936.), njemački filozof, osnivač logičkog pozitivizma i Bečkog kruga.

1936. godine ubio ga je Johann Nelböck, bivši student. Nelböck je osuđen, ali je oslobođen nakon što je postao mučenik rastućeg anti-Židovskog pokreta u gradu (nitko se nije obazirao na to da Schlick nije bio Židov).

Više na (I).

[5] Rudolf Carnap (1891. - 1970.), njemački filozof, član Bečkog kruga i jedan od najeminentnijih zagovarača logičkog pozitivizma.

Više na (II).

[6] Hans Hahn (1879. - 1934.), austrijski matematičar i filozof, zaslužan za mnoge doprinose funkcionalnoj analizi, topologiji, teoriji skupova i td. Najpoznatiji je po Hans-

imati za teoriju brojeva te upisuje studij matematike. Međutim, nedugo nakon toga sudjeluje u seminaru Moritza Schlicka o Bertrandu Russellu[7] te se njegov interes konačno usredotočuje na matematičku logiku. Doktorsku disertaciju u kojoj dokazuje potpunost predikatne logike prvog reda[8] završava 1929. godine, uz mentorstvo Hansa Hahna.

1931. godine objavljuje rad "*Über formal unentscheidbare Sätze der Prinzipia Mathematica und verwandter Systeme 1*"[9] u kojem iznosi dva teorema nepotpunosti. Nakon dvije godine, 1933., zapošljava se na mjestu Privatdozenta na Sveučilištu u Beču. Iste godine po prvi put odlazi u SAD. Tamo upoznaje Alberta Einsteina[10] te ubrzo Gödel i Einstein postaju dobri prijatelji. Sljedećih godina u nekoliko navrata putuje u SAD, Princeton, i održava seriju predavanja o neodlučivosti.

1938. godine ženi se sa Adelom Nimbursky. Nakon pripojenja Austrije Njemačkoj iste godine (1938.) i ukidanja mjesta Privatdozenta, Gödel pokušava naći novi posao. Međutim, to mu ne polazi za rukom zbog njegovih poznanstava sa Židovima iz Bečkog kruga, prvenstveno Hansom Hahnom. Uz to, proglašen je sposobnim za vojnu službu, te mu je prijetilo prisilno novačenje.

Zbog tih razloga, nakon početka rata, sa suprugom Adelom odlazi u SAD,

---

Banachovom teoremu, ključnom alatu u funkcionalnoj analizi.

Više na (III).

[7]Bertrand Arthur William Russell (1872. - 1970.), britanski filozof, matematičar, logičar i povjesničar, jedan od osnivača i najznačajnijih predstavnika analitičke filozofije.

Više na (IV).

[8]Definiranje predikatne logike prvog reda zauzima veći dio četvrtog poglavlja.

[9]Kurt Gödel: "Über formal unentscheidbare Sätze der *Prinzipia Mathematica* und verwandter Systeme 1", Monatshefte für Mathematik und physik 38, 1931., 173 - 198. Hrvatski prijevod: Kurt Gödel: "O formalno neodlučivim stavcima *Principia Mathematica* i srodnih sistema 1", u Nagel, E., Newmann, R., Gödelov dokaz, KruZak, Zagreb, 2001. (10)

[10]Albert Einstein (1879. - 1955.), njemački fizičar. Dobitnik je Nobelove nagrade 1921. godine za svoje doprinose teorijskoj fizici te za otkriće fotoelektričnog efekta. Ipak, najpoznatiji je po svojoj teoriji relativnosti i ekvivalenciji mase i energije ($E = mc^2$).

Više na (V).

gdje ga čeka mjesto na Institutu za napredne studije Sveučilišta u Princetonu. 1947. godine Albert Einstein i Oscar Morgenstern[11] pripremaju Gödela za ispit za stjecanje državljanstva SAD-a (i Einstein i Morgenstern bili su zabrinuti da bi Gödelovo nepredvidljivo ponašanje moglo ugroziti njegove šanse za stjecanje državljanstva, i bili su u pravu[12]).

Gödel u Princetonu nastavlja svoj rad na području osnova matematike, pa 1940. godine objavljuje rad "*Konzistentnost aksioma izbora i generalizirane hipoteze o kontinuumu sa aksiomima teorije skupova*"[13].

1946. godine postaje stalni član Instituta za napredne studije u Princetonu, 1953. redovni profesor, a 1976. profesor emeritus. Oko 1946. prestaje

[11] Oscar Morgenstern (1902. - 1977.), austrijski ekonomist rođen u Njemačkoj. Zajedno sa Johnom von Neumannom formulirao je matematičko područje poznato pod imenom teorija igara (game theory). Kasnije je primijenio teoriju igara na poduzetništvo u slobodnom kapitalizmu.

Više na (VI).

[12] Za vrijeme ispita i razgovora sa sucem, usput je spomenut i nacistički režim koji je u to vrijeme vladao u Njemačkoj. Tada je Gödel informirao suca da bi se u SAD-u legalno mogla uvesti diktatura, zbog logičke kontradikcije u Ustavu. Srećom, Einstein i Morgenstern nisu dozvolili Gödelu da do kraja argumentira svoju tvrdnju i ubrzo mu je dodijeljeno državljanstvo.

Opširnije na (VII).

[13] Kurt Gödel: The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory, 1940., Princeton University Press.

Aksiom izbora jedan je od aksioma Zermelo-Frankelove teorije skupova i formuliran je na sljedeći način: neka je X skup nepraznih skupova. Tada možemo izabrati po jednog člana iz svakog skupa u X. Intuitivno, u bilo kojoj skupini nepraznih skupova, možemo iz svakog skupa izabrati po jednog člana, čak i ako je broj skupova beskonačan ili ako nemamo prethodno određeno pravilo po kojem ćemo birati članove skupa.

Aksiom izbora bitan je zbog mogućnosti uređivanja skupova. Svaki skup može se dobro urediti ako i samo ako je aksiom izbora istinit.

Kažemo da je skup S dobro uređen ako svaki neprazni podskup od S ima najmanji element. (Na primjer, skup $\mathbb{N}$ je dobro uređen skup, no skup $\mathbb{R}$ nije.)

Detaljnije u Gregory H. Moore, "Zermelo's axiom of choice, its origins, development and influence", 1982., Springer.

Za detaljnije objašnjenje hipoteze o kontinuumu vidi fusnotu br. 42 na strani 28.

Zermelo-Frankelova teorija skupova jest aksiomatizirana teorija skupova. Više na (XIX).

objavljivati radove, ali se i dalje bavi znanstvenim radom. Tokom godina u Princetonu ponovo mu se pobuđuju interesi za filozofiju i fiziku, te prema kraju života sve više i više proučava Leibniza, Kanta i Husserla[14].

Pred kraj života Gödel je obolio od psihičke nestabilnosti i paranoje. Bio je uvjeren da ga netko želi otrovati i odbijao je jesti bilo kakvu hranu koju prethodno nije kušala njegova žena Adela. Kada se krajem 1977. godine Adela razboljela te je morala biti hospitalizirana, Gödel je počeo u potpunosti odbijati hranu te se izgladnio do smrti. Umro je 14. siječnja 1978. godine u bolnici u Princetonu. Imao je samo 30 kilograma.

1987. godine u Beču je osnovana međunarodna organizacija Društvo Kurta Gödela (Kurt Gödel Society). Cilj organizacije je poticanje istraživanja na području logike, filozofije i povijesti matematike.

[14] Malo više o tome u Zaključku, str. 27.

3 Povijesno okruženje

U cjelokupnoj povijesti zapadne filozofije i znanosti, važnu ulogu igrala je sigurnost i neupitnost matematičkih tvrdnji. Ta sigurnost uglavnom se objašnjavala aksiomatskom metodom koju je stvorio Euklid[15] formulirajući aksiome za postavljanje geometrije i logička pravila za izvođenje ostalih geometrijskih tvrdnji iz tih aksioma. Tokom Starog i Srednjeg vijeka, Euklidova metoda bila je i ostala sinonim za znanstvenu egzaktnost, i to ne samo u matematici[16].

Međutim, u 19. stoljeća rastu sumnje u sigurnost i egzaktnost matematike. Problemi koji su se gomilali u prethodnim stoljećima[17] konačno postaju dominantni i počinju zahtijevati svoje rješavanje. Glavni poticaj tom razvoju događaja došao je od otkrića neeuklidskih geometrija – postalo je očito da su čak i tako osnovni i općeprihvaćeni matematički temelji, kao što su to bili Euklidovi aksiomi[18], podložni propitivanju i promjeni.

[15] Euklid (oko 300 g. pr. n. e.), grčki matematičar najpoznatiji po svome djelu *Elementi*, u kojem, u trinaest knjiga, iznosi aksiome i teoreme geometrije.

O samome Euklidu zna se vrlo malo. Vrijeme i mjesto rođenja su nepoznati. Smatra se da je živio u vrijeme vladavine Ptolomeja Prvog (323. - 283. g. pr. n. e.) u Aleksandriji. Više na (VIII).

[16] Filozofi poput Spinoze, Leibniza i Descartesa pokušavali su svoje filozofske poglede izložiti geometrijskom metodom preuzetom od Euklida, kako bi pojačali opravdanost svojih tvrdnji.

[17] Većina tih problema bila je vezana uz pokušaje dokazivanja nezavisnosti Euklidovog aksioma o paralelama.

[18] Najkontroverzniji Euklidov aksiom je onaj o paralelama: ako pravac, koji siječe dva druga pravca, tvori dva unutrašnja kuta koji zajedno daju manje od dva prava kuta, tada se dva pravca, dovoljno produžena, sijeku na onoj strani na kojoj je suma dvaju unutrašnjih kuteva manja od dva prava kuta. U slučaju da je suma dva unutrašnja kuta jednaka dvama pravim kutevima, pravci se nikada neće sječi. Ili, kroz točku izvan nekog pravca, moguće je povući točno jedan pravac koji će biti paralelan sa danim pravcem.

Problem ovog aksioma jest to što on tvrdi nešto o beskonačno udaljenim točkama u prostoru, i to nešto što nije nikako samorazumljivo i automatski prihvatljivo. Tokom stoljeća, mnogi su pokušavali izvesti ovaj aksiom iz preostala četiri, ali nisu uspijevali. Konačno, Istovremeno, primat u matematici od geometrije preuzima teorija brojeva. Rezultat je dodatno povećavanje apstraktnosti i nesigurnosti koja je vladala među matematičarima.

Jedan od prvih matematičara koji su se počeli ozbiljno baviti temeljima matematike bio je Gottlob Frege[19]. On je shvatio da veliki dio problema leži u nedovoljno definiranim osnovnim pojmovima matematike. U svom spisu *Pojmovno pismo (Begriffsschrift)*[20] bavi se stvaranjem čisto logičkog jezika sa strogo definiranom gramatikom, a u *Osnovama aritmetike (Grundgesetze der Arithmetik)*[21] pokušajem prikaza matematike kao dijela formalne logike. Takav pristup postao je poznat pod nazivom formalizam. U formaliziranoj teoriji uvode se znakovi za propozicije, predikate, relacije, varijable, konstante, logičke veznike i kvantifikatore. Tvrdnje se sklapaju u formule, a formule u dokaze po strogo određenim pravilima, pravilima koja u obzir uzimaju samo redoslijed znakova i izuzimaju bilo kakvo značenje koje bi ti znakovi mogli imati.

Paralelno sa istraživanjima temelja matematike i pojavama formalnih sistema, vodile su se rasprave o konzistentnosti matematike. Te rasprave također su bile potaknute pojavom neeuklidskih geometrija koje su dovele u pitanje istinitost Euklidovih aksioma. Ideja je bila sljedeća: pošto su Euklidovi aksiomi bili smatrani istinitima, a sve geometrijske tvrdnje dobivene su dedukcijom iz tih aksioma, tada su i te tvrdnje istinite. Međutim, ako aksiomi više nisu neupitno istiniti, tada je u pitanje dovedena i istinitost svih tvrdnji koje su iz njih izvedene. Preciznije, postavilo se pitanje konzistentnosti određenog skupa aksioma. Skup aksioma konzistentan je ako se iz

---

u 19. stoljeću, dokazano je da to nije moguće. Rezultat toga su neeuklidske geometrije, koje zadovoljavaju prva 4 Euklidova aksioma, a proturječe aksiomu o paralelama.

[19] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848. - 1925.), njemački matematičar, logičar i filozof. Zaslužan je za razvoj današnje matematičke logike i analitičke filozofije.

Više na (IX).

[20] Gottlob Frege: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S., 1879.

[21] Gottlob Frege: *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena: Verlag Hermann Pohle, Band I, 1893.

njega ne mogu izvesti proturječne tvrdnje, ili, ako se iz njega ne može izvesti barem jedna tvrdnja (ove dvije definicije mogu se svesti jedna na drugu). U pokušaju dokazivanja konzistentnosti Euklidovih aksioma, matematičari su došli do relativnih dokaza konzistentnosti. Pokazali su da je jedan skup aksioma konzistentan ako je konzistentan neki drugi skup koji je na određeni način povezan sa prvim skupom. Jedan od najznačajnijih relativnih dokaza konzistentnosti jest Hilbertov dokaz konzistentnosti Euklidove geometrije relativno sa teorijom realnih brojeva, kroz uvođenje kartezijanskih koordinata.

I u ovom području, Frege je bio jedan od pionira. On je vrlo rano uvidio potrebu dokaza konzistentnosti aritmetike. Fregeova ideja o formalizaciji i aksiomatizaciji matematike upala je u teškoće kada je Bertrand Russell otkrio postojanje paradoksa[22] u Fregeovoj teoriji. Nakon što je doznao za te paradokse, Frege je odustao od daljnjeg rada na tom području. Međutim, Russella to nije obeshrabrilo te je u suradnji sa Whiteheadom[23] sastavio monumentalno djelo *Principia Mathematica*[24]. Paradokse su izbjegli kroz uvođenje teorije tipova: skup ne spada u isti tip predmeta kao i elementi skupa, pa postaje bespredmetno govoriti o skupu svih skupova. Iako matematičari nisu prihvatili način na koji su Russel i Whitehead izbjegli paradokse, *Principia Mathematica* stvorila je moćan instument za istraživanje aritmetike kao sustava znakova bez značenja. Usprkos tome što su Russell i Whitehead

[22] Russelov paradoks: nazovimo skup x normalnim ako $x \notin x$, tj. x nije član samog sebe. Neka je S skup svih normalnih skupova. Postavlja se pitanje da li je S normalan skup ili ne. Ako je S normalan skup, onda, pošto je S skup svih normalnih skupova, vrijedi $S \in S$. Međutim, po prvotnoj definiciji, to znači da S nije normalan skup. S druge strane, ako S nije normalan skup, tada se ne nalazi u skupu svih normalnih skupova. Dakle, $S \notin S$, što je definicija normalnog skupa. Zaključak je da je S normalan skup ako i samo ako S nije normalan skup.

Russelov paradoks bio je značajan poticaj formulaciji nove teorije skupova i razvoju aksiomatizacije.

[23] Alfred North Whitehead (1861. - 1947.), britanski matematičar i filozof.

Više na (X).

[24] Whitehead, Alfred North, i Russell, Bertrand: *Principia Mathematica*, 3 toma, Cambridge University Press, 1910., 1912., i 1913.

zagovarali logicizam[25], *Principia Mathematica* je uz promoviranje logicizma osigurala i širu potporu samoj ideji formalnog sistema.

Jedan od najjačih pristaša formaliziranja matematike, a ujedno i jedan od najbrilijantnijih matematičara tog doba, bio je David Hilbert[26]. On je formulirao skup ideja koje su postale poznate kao Hilbertov program:

- čitava matematika može se prikazati u obliku formalnog sistema[27]
- da bi se to postiglo, potrebno je dati apsolutni dokaz konzistentnosti aritmetike
- dokaz konzistentnosti mora se provesti korištenjem konačnih metoda

Hilbertovi pristalice i sam Hilbert intenzivno su radili na tim problemima, te su postizali zapažene rezultate. Pojavili su se dokazi konzistentnosti aritmetike uz neka ograničenja, prvenstveno vezana uz aksiom matematičke indukcije. U svakom slučaju, očekivalo se da je rješenje Hilbertovog programa pitanje trenutka. Isto tako, očekivalo se da će dokaz dati neki od aritmetičkih virtuoza tog vremena, matematičara koji su transformirali algebarske formule na nevjerojatan način i tako dolazili do novih spoznaja.

Tada je Kurt Gödel, mladi austrijski matematičar, objavio svoj rad "*O formalno neodlučivim stavcima Principia Mathematica i srodnih sustava 1*". U tom radu dokazao je nemogućnost ostvarivanja Hilbertovog programa u svim njegovim točkama. Najporaznija činjenica je bila sljedeća: taj teorem dokazan je uz pomoć prilično jednostavnih formula, bez spektakularnih

[25] Logicizam: jedna od škola u filozofiji matematike, koja tvrdi da je matematika proširenje logike, te je kao takva svodiva na logiku (bilo u cijelosti ili u značajnom dijelu). Osnivač škole bio je Frege, a najznačajniji predstavnici upravo Russell i Whitehead.

[26] David Hilbert (1862. - 1943.), njemački matematičar. Smatra se za jednog od najsvestranijih i najutjecajnijih matematičara devetnaestog i ranog dvadesetog stoljeća.

Više na (XI).

[27] Karakteristike formalnog sistema su sljedeće: (1) definirani su svi simboli koji se koriste unutar sistema, (2) definiran je postupak kojim se iz simbola izvode formule sistema i (3) definiran je postupak kojim se nizovi formula sklapaju u dokaze.

Za primjer detaljnog definiranja formalnog sistema, vidi četvrto poglavlje.

transformacija tih formula, te uz primjenu nekoliko revolucionarnih ideja i metoda zaključivanja.

4 Teorijska podloga

U ovom poglavlju definira se što je to teorija prvog reda, zatim teorija prvog reda s jednakošću, te, naposlijetku, Peanova aritmetika kao jedna istaknuta teorija prvog reda s jednakošću. To je potrebno da bi se shvatilo u kojim su okvirima i s kojim ograničenjima primjenjivi Gödelovi dokazi.

Da bi se potpuno zadala neka formalna teorija prvog reda, potrebno je definirati pripadni jezik, skup aksioma te pravila izvoda[28].

Alfabet neke teorije prvog reda unija je skupova $A_1, ..., A_7$:

$A_1 = \{x_0, x_1, ...\}$, prebrojiv skup čiji se elementi zovu individualne varijable,

$A_2 = \{P_0, P_1, ...\}$, prebrojiv skup čiji se elementi zovu rečenične varijable,

$A_3 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$, skup logičkih simbola (redom negacija, konjunkcija, disjunkcija, kondicional, bikondicional, univerzalni te egzistencijalni kvantifikator),

$A_4 = \{R_k^{n_k} : k \in I\}$, skup čiji se elementi zovu relacijski simboli; skup I je neki podskup od $\mathbb{N}$; n_k jest mjesnost relacijskog simbola; također, pretpostavlja se da ovaj skup sadrži barem jedan dvomjesni relacijski simbol,

$A_5 = \{f_k^{m_k} : k \in J\}$, skup funkcijskih simbola; J je neki podskup od $\mathbb{N}$, možda i prazan; m_k jest mjesnost funkcijskog simbola,

$A_6 = \{c_k : k \in K\}$, skup konstantskih simbola; K je neki podskup od $\mathbb{N}$, možda i prazan,

$A_7 = \{(),\}$, skup pomoćnih simbola (lijeva i desna zagrada i zarez).

Unija skupova A_3, A_4 i A_5 naziva se skup nelogičkih simbola ili signatura, u oznaci σ.

[28] Aksiomatizacija je preuzeta iz (14).

Riječ alfabeta neke teorije jest bilo koji konačan niz znakova alfabeta te teorije.

Term je riječ definirana na sljedeći način:

1. svaka individualna varijabla i svaki konstantski simbol alfabeta je term,
2. ako je f neki n-mjesni funkcijski simbol i $t_1, ..., t_n$ termi tada je i riječ $f(t_1, ..., t_n)$ term,
3. riječ je term akko je nastala pomoću konačno mnogo primjena pravila a) i b).

Atomarna formula jest riječ $R(t_1, ..., t_n)$ gdje je R neki n-mjesni relacijski simbol i $t_1, ..., t_n$ termi.

Formula jest riječ definirana na sljedeći način:

1. svaka atomarna formula je formula,
2. ako su A i B formule, tada su $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ također formule,
3. ako je A formula a x varijabla, tada su $(\forall x A)$ i $(\exists x A)$ također formule,
4. riječ je formula akko je nastala primjenom konačno mnogo puta pravila a), b) i c).

Struktura jest uređeni par $\mathcal{M} = (M, \varphi)$, gdje je M neprazni skup koji se zove nosač, a φ je preslikavanje sa skupa nelogičkih simbola σ sa sljedećim svojstvima:

1. svakom relacijskom simbolu $R_k^{n_k}$ iz σ pridružuje se n_k-mjesna relacija $\varphi(R_k^{n_k})$ na M,
2. svakom funkcijskom simbolu $f_l^{m_k}$ iz σ pridružuje se m_k-mjesna funkcija $\varphi(f_k^{m_k})$ sa M^{m_k} u M,

3. svakom konstantskom simbolu c_k iz σ pridružuje se neki element $\varphi(c_k)$ iz M.

Valuacija jest svaka funkcija sa skupa individualnih varijabli u nosač strukture, unutar određene strukture $\mathcal{M}$, u oznaci v. Za danu valuaciju v i varijablu x sa v_x označavamo svaku valuaciju koja se podudara sa v na svim varijablama osim možda na varijabli x.

Interpretacija jest svaki uređeni par neke strukture $\mathcal{M}$ i proizvoljne valuacije v na M, u oznaci I.

Istinitost formule F za danu interpretaciju $I = (\mathcal{M}, v)$, u oznaci $\mathcal{M} \models_v F$ definiramo na sljedeći način:

1. ako je F atomarna formula, tj. F je oblika $R(t_1, ..., t_n)$, tada je $\mathcal{M} \models_v F$ akko $[v(t_1), ..., v(t_n)] \in \varphi(R)$,

2. ako je F oblika $\neg G$, tada je $\mathcal{M} \models_v F$ akko $\mathcal{M} \not\models_v G$,

3. ako je F oblika $A \wedge B$, tada je $\mathcal{M} \models_v F$ akko $\mathcal{M} \models_v A$ i $\mathcal{M} \models_v B$,

4. ako je F oblika $A \vee B$, tada je $\mathcal{M} \models_v F$ akko $\mathcal{M} \models_v A$ ili $\mathcal{M} \models_v B$,

5. ako je F oblika $A \rightarrow B$, tada je $\mathcal{M} \models_v F$ akko $\mathcal{M} \not\models_v A$ ili $\mathcal{M} \models_v B$,

6. ako je F oblika $A \leftrightarrow B$, tada je $\mathcal{M} \models_v F$ akko $\mathcal{M} \models_v A$ i $\mathcal{M} \models_v B$, ili $\mathcal{M} \not\models_v A$ i $\mathcal{M} \not\models_v B$,

7. ako je F oblika $\forall x G$, tada je $\mathcal{M} \models_v F$ akko $\mathcal{M} \models_{v_x} G$ za sve valuacije v_x,

8. ako je F oblika $\exists x G$, tada je $\mathcal{M} \models_v F$ akko $\mathcal{M} \models_{v_x} G$ za neku valuaciju v_x.

Račun logike prvog reda (kao jedne specifične teorije prvog reda) zadan je sa sljedećim shemama aksioma $(A_1, ..., A_5)$ i pravilima izvoda (P_1, P_2):

(A1) $A \to (B \to A)$,

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$,

(A4) $\forall x A(x) \to A(t/x)$ [29] gdje je term t slobodan[30] za varijablu x u formuli A,

(A5) $\forall x (A \to B) \to (A \to \forall x B)$ gdje formula A ne sadrži slobodne nastupe varijable x ,

$$(P_1) \quad \frac{A \qquad A \to B}{B} \quad \text{modus ponens,}$$

$$(P_2) \quad \frac{A}{\forall x A} \quad \text{generalizacija.}$$

Niz formula $A_1, ..., A_n$ jest **dokaz** za neku formulu A ako vrijedi sljedeće:

1. formula A_n jest upravo A,
2. za sve $i \in \{1, ..., n\}$ formula A_i jest ili aksiom, ili je dobivena primjenom pravila modus ponens na neke formule A_j i A_k, $j, k \leq i$, ili primjenom pravila generalizacije na neku formulu A_m, $m \leq i$.

Teorija prvog reda s jednakošću jest teorija sa sljedećim nelogičkim aksiomima (uz logičke aksiome $A_1, ..., A_5$):

1. $x = x$,

[29] Sa t/x označavamo supstituciju svakog nastupa varijable x termom t.

[30] U atomarnim formulama svi nastupi varijabli su slobodni. U formulama oblika $\forall x A$ i $\exists x A$ svaki nastup varijable x je vezan. U nekoj formuli moguće je imati i slobodne i vezane nastupe neke varijable. Term t slobodan je za varijablu x u određenoj formuli ako niti jedan slobodan nastup nastup varijable x ne leži u dosegu kvantifikatora $\forall y$ i/ili $\exists y$, gdje je y proizvoljna varijabla terma t.

2. $x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A'(y))$, gdje je $A(x)$ atomarna formula, a $A'(y)$ je dobivena zamjenom nekih, možda i svih, slobodnih nastupa varijable x s varijablom y.

Za strukturu $\mathcal{M}$ kažemo da je **model** za teoriju T ako za sve nelogičke aksiome F od T vrijedi $\mathcal{M} \models F$.

Peanova aritmetika, skraćeno PA, jest teorija prvog reda s jednakošću, čiji je skup nelogičkih simbola $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, gdje je $=$ znak za relaciju jednakosti, 0 konstantski simbol, $'$ jednomjesni funkcijski simbol (standardna interpretacija je funkcija sljedbenika, tj. $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(x) = x + 1$, a + i $\cdot$ su dvomjesni funkcijski simboli (standardna interpretacija jest zbrajanje i množenje). Nosač standardnog modela[31] od PA je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Tako dobivenu strukturu označavat ćemo sa ω. Skup svih formula za koje je ω model, naziva se aritmetika.

Aksiomi PA su, uz standardne logičke aksiome $(A_1 - A_5)$ i aksiome za jednakost, sljedeći:

1. $x' = y' \rightarrow x = y$,

2. $0 \neq x'$,

3. $x + 0 = x$,

4. $x + y' = (x + y)'$,

5. $x \cdot 0 = 0$,

6. $x \cdot y' = x \cdot y + x$,

7. shema aksioma indukcije: $A(0) \rightarrow \{\forall x [A(x) \rightarrow A(x')] \rightarrow \forall x A(x)\}$, gdje je $A(x)$ proizvoljna formula.

[31] Svaki model koji je izomorfan sa ω naziva se standardni model. Za definiciju izomorfnosti, vidi (14), str. 125.

Nakon tako formalizirane aritmetike, nameću se pitanja o njenoj potpunosti, konzistentnosti i odlučivosti. Teorija T je potpuna ako za svaku formulu F teorije T vrijedi $T \vdash F$ ili $T \vdash \neg F$. PA nije potpuna, što tvrdi Gödelov prvi teorem o nepotpunosti, a o čemu će se raspravljati u sljedećem poglavlju. Teorija T konzistentna je ako ne postoji formula F takva da vrijedi $T \vdash F$ i $T \vdash \neg F$. Alternativno, teorija T je konzistentna ako postoji barem jedna formula F takva da $T \nvdash F$. Logika prvog reda je konzistentna. PA je konzistentna, ali nije moguće dati konačan i apsolutan dokaz njene konzistentnosti. O tome govori Gödelov drugi teorem o nepotpunosti i o tome će se također raspravljati u sljedećem poglavlju. Teorija T je odlučiva ako postoji algoritam koji za svaku formulu F teorije T u konačno mnogo koraka određuje da li je formula valjana. Logika sudova je odlučiva. Logika prvog reda nije odlučiva. PA također nije odlučiva. Međutim, matematičari su za PA razvili srodan pojam, pojam izračunljivosti. Funkcija F izračunljiva je ako postoji algoritam koji za određenu vrijednost varijabli $x_1, ..., x_n$ u konačno mnogo koraka završava izračun i određuje vrijednost $F(x_1, ..., x_n)$. Ako $x_1, ...x_n$ nisu u domeni funkcije F, algoritam ne smije stati (mora raditi beskonačno), i tada funkcija nije izračunljiva.

Pošto pojam izračunljivosti nije bilo moguce definirati na zadovoljavajući način (tj., dovoljno striktno), razvijen je pojam RAM-izračunljive funkcije (RAM - Random Access Machine) te parcijalno rekurzivne funkcije[32]. Ustanovljeno je da vrijedi sljedeće: F je RAM-izračunljiva funkcija ako i samo ako je F parcijalno rekurzivna funkcija. Nadalje, sljedeću tvrdnju se općenito prihvaća kao istinitu: svaka funkcija koja je izračunljiva u intuitivnom smislu jest parcijalno rekurzivna. Tu tvrdnju je formulirao A. Church 1936. godine i poznata je kao Churchova teza. Tvrdnja koju Gödel koristi kako bi pokazao nepotpunost PA jest upravo jedna parcijalno rekurzivna relacija, i većina opsega njegovog rada odnosi se na dokazivanje rekurzivnosti te relacije. Jer, ako je relacija rekurzivna, tada pripada sustavu PA. Nadalje, ako se pokaže

[32] Za definicije RAM-izračunljivih funkcija, RAM-stroja i parcijalno rekurzivnih funkcija, vidi (11) i (13).

da nije moguce izvesti ni nju niti njenu negaciju iz sustava PA, dolazimo do tvrdnje prvog teorema o nepotpunosti.

5 Iskazi teorema i skice izvoda

Teorem 1 (prvi teorem nepotpunosti): Postoji rečenica ϕ takva da vrijedi $\mathbb{N} \models \phi$ i $PA \nvdash \phi$. Nadalje, ako je T proširenje od PA koje se može aksiomatizirati, tj. $PA \subseteq T$ i $\mathbb{N} \models T$, tada postoji rečenica ϕ takva da vrijedi $\mathbb{N} \models \phi$, $T \nvdash \phi$ i $T \nvdash \neg\phi$.

Dakle, postoji tvrdnja o prirodnim brojevima koja je istinita, ali koja ne se može dokazati niti unutar PA, ali niti unutar bilo kojeg aksiomatizabilnog proširenja od PA. Zbog toga moramo zaključiti da je PA ali i bilo koje njeno proširenje, nepotpuno.

Skica dokaza:

Na početku svog rada, Gödel opisuje kodiranje aritmetike. Formule nekog formalnog sustava konačni su nizovi znakova alfabeta tog sustava. Gledajući način na koji su formule definirane u prošlom poglavlju, nije teško točno odrediti koji nizovi predstavljaju formule a koji ne. Isto tako, dokazi su konačni nizovi formula. Metamatematički gledano, svejedno je koji znakovi se uzmu kao početni, tj. koji se definiraju u alfabetu teorije. Gödel je uzeo prirodne brojeve. Formule su postale nizovi prirodnih brojeva, a dokazi nizovi nizova prirodnih brojeva. Na taj način, metamatematički stavci postali su stavci o prirodnim brojevima i mogu se izricati u simbolima unutar samog sutava PM. Iz toga slijedi da se o sustavu može govoriti unutar samog sustava.

Kodiranje se vrši na sljedeći način: svakom konstantskom znaku pridružuje se jedan broj od 1 do 10.

Konstantski znakovi[33]	Gödelov broj	Značenje
$\neg$	1	negacija
$\vee$	2	disjunkcija
$\rightarrow$	3	implikacija
$\exists$	4	egzistencijalni kvantifikator
$=$	5	znak jednakosti
0	6	nula
$'$	7	funkcija sljedbenika
(	8	lijeva zagrada
)	9	desna zagrada
,	10	zarez

Svakoj brojevnoj varijabli pridružuje se primbroj veći od 10 ($x \mapsto 11$, $y \mapsto 13$, $z \mapsto 17, ...$), svakoj rečeničnoj varijabli pridružuje se kvadrat primbroja većeg od 10 ($p \mapsto 11^2$, $q \mapsto 13^2$, $r \mapsto 17^2, ...$) i svakoj predikatskoj varijabli pridružuje se kub primbroja većeg od 10 ($P \mapsto 11^3$, $Q \mapsto 13^3$, $R \mapsto 17^3, ...$). Sada svakoj formuli možemo jednoznačno pridružiti konačan niz prirodnih brojeva. Međutim, jednostavnije je svakoj formuli pridružiti samo jedan broj. To ćemo učiniti na sljedeći način: neka je l duljina niza prirodnih brojeva koji označava neku određenu formulu. Uzmimo prvih l primbrojeva i svaki potenciramo sa Gödelovim brojem znaka koji je na odgovarajućem mjestu u nizu. Zatim pomnožimo te potencije. Na primjer, pogledajmo formulu $\neg(\exists x(0 = x'))$, tj. nula nije sljedbenik niti jednog broja. Niz brojeva koji bi bio pridružen toj formuli jest sljedeći: 1,8,4,11,8,6,5,11,7,9,9. Gödelov broj te formule jest $2^1 \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^{11} \cdot 11^8 \cdot 13^6 \cdot 17^5 \cdot 19^{11} \cdot 23^7 \cdot 29^9 \cdot 31^9$. Označimo taj broj sa m. Neka se ta formula pojavljuje u dokazu sa nekom drugom formulom čiji je Gödelov broj n. Niz od te dvije formule označili bi sa Gödelovim brojem $2^m \cdot 3^n$. Dakle, za svaku formulu ili niz formula možemo odrediti pripadni Gödelov broj. Ali, i za svaki prirodni broj možemo odrediti da li

[33] Gödel u svom radu koristi druge simbole za negaciju, disjunkciju i implikaciju. Pošto se ti simboli više ne koriste toliko često, u ovom radu je upotrijebljena notacija koja prevladava danas.

je on Gödelov broj neke formule ili niza formula. Još bitnije, predikati "x je $k\hat{o}d$ formule y" i "x je $k\hat{o}d$ dokaza y" su primitivno rekurzivni. Gödelov broj za proizvoljmu formulu ϕ označavat ćemo sa $\ulcorner\phi\urcorner$.

Možda najbitniji moment Gödelovog dokaza predstavljaju sljedeće dvije leme:

Lema 1 (lema o reprezentaciji)**:** Ako je $f(\overrightarrow{x})$ primitivno rekurzivna funkcija, tada postoji formula $\phi_f(\overrightarrow{x}, y)$ takva da vrijedi:

a) $f(n) = m \iff PA \vdash \phi_f(\widehat{\overrightarrow{n}}, \widehat{m}) \iff \mathbb{N} \models \phi_f(\widehat{\overrightarrow{n}}, \widehat{m})$

b) $PA \vdash \forall x \exists y\ \phi_f(\overrightarrow{x}, y)$

c) $PA \vdash \forall x \forall y \forall z ((\phi_f(\overrightarrow{x}, y) \wedge \phi_f(\overrightarrow{x}, z)) \rightarrow y = z)$

Lema o reprezentaciji kaže da za svaku primitivno rekurzivnu relaciju postoji formula unutar PA koja ju reprezentira. Zbog toga većinu Gödelovog članka zauzima dokaz rekurzivnosti njegove rečenice[34]. Kada je pokazao da je ona rekurzivna, automatski iz prethodne leme slijedi da je reprezentabilna u PA, što onda znači, u kombinaciji sa sljedećom lemom, da je PA nepotpuna.

Lema 2 (lema o dijagonalizaciji): Neka je $\phi(v)$ aritmetička formula sa jednom slobodnom varijablom v. Tada postoji rečenica ψ takva da
$PA \vdash \psi \leftrightarrow \phi(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Intuitivno, lema o dijagonalizaciji kaže: moj Gödelov broj ima svojstvo ϕ. Pomoću leme o dijagonalizaciji, Gödel je uspio dobiti samoreferenciju unutar PA ali bez opasnosti od paradoksa Russelovog tipa.

Uzmimo neka teorija T, nadalje, ima svojstvo da je ona aksiomatizabilno proširenje od PA. Sa $Prov_T(x, y)$ označimo predikat "x je dokaz formule sa Gödelovim brojem y u T". $Prov_T$ je primitivno rekurzivan predikat. Neka je $\psi_{Prov_T}(x, y)$ formula koja reprezentira $Prov_T$ u PA[35] i neka vrijedi $Pr_T(y) \iff \exists x \psi_{Prov_T}(x, y)$. Prema lemi o dijagonalizaciji, postoji rečenica ϕ takva da vrijedi $PA \vdash \phi \leftrightarrow \neg Pr_T(\ulcorner\phi\urcorner)$. Rečenica ϕ intuitivno tvrdi: ja nisam dokaziva u PA, tj, za formulu sa mojim Gödelovim brojem ne postoji dokaz u PA. Rečenica ϕ naziva se Gödelova rečenica za teoriju T. Gödel je,

[34] Za potpuni izvod rekurzivnosti vidi (8).

[35] Iz Leme 1 u ovom poglavlju znamo da takva formula sigurno postoji.

nakon otkrića ove rečenice, pokazao da se ona može dokazati unutar PA ako i samo ako se njena negacija može dokazati. Nadalje, pokazao je da je ϕ istinita rečenica o prirodnim brojevima. Znači da postoji barem jedna istinita tvrdnja o prirodnim brojevima koja je ne može dokazati unutar PA. Ili, ako je PA potpuna, onda je nekonzistentna, što je znatno neprihvatljivije od nepotpunosti[36].

U slučaju da odlučimo i uvrstimo formulu ϕ među aksiome PA, moguće je konstruirati novu rečenicu ϕ_1 koja će imati svojstvo Gődelove rečenice za $PA \cup \phi$. Zbog toga teorem nepotpunosti vrijedi za svako aksiomatizabilno proširenje od PA.

Teorem 2 (drugi teorem nepotpunosti): Neka je T neko aksiomatizabilno proširenje od PA, tj. $PA \subset T$, i $\mathbb{N} \models T$. Označimo sa $Con(T)$ rečenicu $\neg Pr_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. Tada je $T \nvdash Con(T)$.

Skica dokaza:

Lema 3: Neka je T teorija takva da vrijedi $PA \subset T$ i neka su ϕ i φ rečenice teorije T. Sljedeća pravila izvoda dopustiva[37] su u T:

(P1) $T \vdash \phi \rightarrow PA \vdash Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner)$

(P2) $PA \vdash Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner) \rightarrow PA \vdash Pr_T(\ulcorner Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$

(P3) $PA \vdash (Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner) \wedge Pr_T(\ulcorner \phi \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow Pr_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

(P4) $PA \vdash (Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner) \wedge Pr_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner)$

(P5) $PA \vdash Pr_{T+\varphi}(\ulcorner \phi \urcorner) \rightarrow Pr_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \phi \urcorner)$

Neka je ϕ Gödelova rečenica za PA takva da vrijedi $PA \vdash \phi \leftrightarrow Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner)$. Dovoljno je dokazati da vrijedi $PA \vdash \phi \leftrightarrow Con(T)$. Tada iz prvog teorema o nepotpunosti slijedi $PA \nvdash Con(t)$.

[36] Gödelova rečenica tvrdi sama za sebe da se ne može dokazati. Ako bi je ipak uspjeli dokazati u PA, tada bi imali teorem koji proturječi samome sebi, dakle PA bi bila nekonzistentna.

[37] Za neko pravilo izvoda $\frac{A_1 \ldots A_n}{B}$ kažemo da je dopustivo u nekoj teoriji T ako vrijedi $(\vdash_T A_1 \wedge \ldots \wedge \vdash_T A_n) \rightarrow \vdash_T B$.

1. $T \vdash 0 = 1 \to \phi$ (iz neistine se može zaključiti bilo što)

2. $PA \vdash Pr_T(\ulcorner 0 = 1 \to \phi \urcorner)$ (prema P_1 iz leme 3)

3. $PA \vdash (Pr_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \wedge Pr_T(\ulcorner 0 = 1 \to \phi \urcorner) \to Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner)$ (prema P_3 iz leme 3)

4. $PA \vdash Pr_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \to Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner)$ (iz 2. i 3.)

5. $PA \vdash \neg Con(T) \to Pr_T(\ulcorner \phi \urcorner)$ (iz definicije predikata $Con(T)$ u iskazu drugog teorema)

6. $PA \vdash \neg Con(T) \to \neg \phi$ (iz definicije ϕ kao Gödelove rečenice)

7. $PA \vdash \phi \to Con(T)$ (obrat po kontrapoziciji)

Slično se dokazuje i drugi smjer, tj. $PA \vdash Con(T) \to \phi$. Iz $PA \vdash \phi \to Con(T)$ i $PA \vdash Con(T) \to \phi$ slijedi tražena formula $PA \vdash \phi \leftrightarrow Con(T)$.

Dakle, Gödelova rečenica za teoriju T jednaka je tvrdnji o njenoj konzistentnosti. To znači da se konzistentnost nekog formalnog sistema ne može dokazati nikakvim zaključivanjem koje je moguće izraziti unutar tog sistema. Drugi teorem nepotpunosti jednostavno slijedi iz prvoga, međutim, njegova je značajnost neuporedivo veća, jer nepobitno uništava Hilbertov program, tj. nadu u apsolutni i finitistički dokaz konzistentnosti aritmetike.

6 Zaključak

Gödelov članak, iako mali po opsegu, donio je nekoliko iznimno bitnih uvida u temelje matematike.

Prvi, a možda i najvažniji, jest jasna razlika između istine i formalne dokazivosti. Istina je znatno obuhvatniji pojam i to je srž neuspjeha Hilbertovog programa. Formalna dokazivost može, u najboljem slučaju, težiti maksimalno se približiti istini, ali je nikada ne može potpuno doseći. O tome govori Tarskijev teorem[38].

Drugi uvid je metodološke naravi. Sadrži ideje kodiranja, aritmetizacije i dijagonalizacije tvrdnji. Od onda, kodiranje je postalo jedna od najkorištenijih metoda u matematici, a dijagonalizacija metoda izbjegavanja paradoksa uz istovremeno postizanje samoreferencije.

Treći uvid proizlazi iz drugog teorema nepotpunosti, a odnosi se na konzistentnost formalnih sistema. Ispostavilo se da konzistentnost sistema, iako bitna, ne može biti objektivan razlog za povećanje našeg povjerenja u taj sistem, pošto smo morali posegnuti za dokaznim sredstvima koja su jača od ciljanog sistema da bi dokazali njegovu konzistentnost. To je i glavni razlog zbog kojega većina matematičara uopće ne obraća pozornost na teoreme nepotpunosti.

Iako je u početku objavljivanje Gödelovih teorema izazvalo veliku pomut-

[38] Alfred Tarski, poljski matematičar i logičar (1902.-1983.), uz Russela, Fregea i Gödela, smatra se najvećim logičarem tog vremena. Njegov teorem o nedefinabilnosti vrlo je srodan sa Gödelovim teoremaima nepotpunosti.

Teorem (Tarskijev teorem o nedefinabilnosti): neka je T proširenje od PA koje se moze aksiomatizirati, tj. $PA \subseteq T$ i $\mathbb{N} \models T$, te neka je T^* skup Gödelovih brojeva rečenica iz T. Tada ne postoji formula $True(x)$ iz T takva da za svaku formulu ϕ iz T vrijedi $True(x) \leftrightarrow \phi$. Tj., Skup T^* ne može se definirati.

Intuitivno, teorem tvrdi da se koncept istinitosti za neki formalni sistem ne može izraziti unutar tog sistema. Moraju se uzeti sredstva koja su jača od danog sistema.

Danas se pri izvođenju prvog teorema o nepotpunosti prvo dokaže Tarskijev teorem o nedefinabilnosti, iz kojeg tada jednostavno slijedi prvi teorem.

Više na (XII).

nju među matematičarima tog vremena, dugoročno gledano taj događaj nije izazvao neke veće promjene u radu većine matematičara. Teoremi se tiču samih temelja matematike, a pokazalo se da nadgradnja funkcionira usprkos korjenitim promjenama u temeljima. Ipak, ti su teoremi predstavljali kraj jednog velikog i značajnog razdoblja u povijesti istraživanja temelja matematike, i, još bitnije, dali poticaj i usmjerenje za daljnja istraživanja na tom području. Nakon što je Gödel pokazao da se konzistentnost aritmetike ne može dokazati unutar nje same, ubrzo su se pojavili dokazi koji su koristili jače sisteme od aritmetike[39]. Ti dokazi ne zadovoljavaju zahtjeve Hilbertovog programa, ali svejedno predstavljaju bitne doprinose u istraživanju temelja matematike.

Pomalo začudno, Gödelovi teoremi odrazili su se na razna područja izvan logike, od filozofije uma i religije do fizike. John Lucas, britanski filozof, koristi teoreme u svojem argumentu da su ljudi superiorni strojevima[40], te da ljudi imaju slobodnu volju[41]. Općenito se smatra da su Lucasovi zaključci

[39] Najpoznatiji takav dokaz onaj je Gerharda Gentzena.
Više o Gentzenu i njegovom dokazu na (XIII).

[40] Argument ide kako slijedi:

1. Svaki stroj instanca je nekog formalnog sistema.
2. Ako je taj stroj sposoban za reproduciranje aritmetičkih formula, a ujedno je i konzistentan, tada postoji rečenica koju on neće moći reproducirati, tj. Gödelova rečenica za taj formalni sistem.
3. Ljudi mogu prepoznati istinitost te rečenice.
4. Dakle, ljudi su superiorni strojevima.

Preuzeto iz (3).

[41] Ovaj argument donekle je sličan prethodnome, ali je upotrebljen u drugom području:

1. Determinizam znači da za svako ljudsko biće postoji logički program L koji može potpuno pouzdano predvidjeti njegove radnje u svim okolnostima.
2. Za svaki logički program L, dovoljno pametan matematički logičar može pronaći njegovu Gödelovu rečenicu.
3. Taj matematički logičar to može učiniti i za svoj program L.

puno prenategnuti, te da su teoremi previše apstraktni da bi imali bilo kakvu praktičnu upotrebu u stvarnom životu. Sam Gödel izrazio je duboku sumnju u istinitost Lucasovih pretpostavki. Prvenstveno, smatrao je da ljudski um nije u stanju izraziti sve svoje matematičke intuicije. Dakle, čak i pod pretpostavkom da nema kvalitativnih razlika između ljudskog uma i formalnog stroja, ljudski um pati od istih problema. S druge strane, ako bi i postojao stroj koji je u stanju formalizirati sve matematičke intuicije, mi ne bi bili u stanju dokazati da je to tako (prema drugom teoremu nepotpunosti). Još gore, mi ne bi bili u stanju sa matematičkom sigurnošću ustanoviti da taj stroj daje samo istinite rezultate (maksimalna provjera koju možemo napraviti u tom slučaju je empirijska, dakle konačna). Gödel je sam zaključio da iz njegovih teorema nepotpunosti slijedi jedna od dvije sljedeće stvari: ili ljudski um nije mehanički (ali svejedno ne može izraziti sve svoje intuicije), ili ne može razumjeti svoju vlastitu mehaničnost. U oba slučaja, usporedba sa strojevima je bespredmetna.

U fizici, prema pozitivističkoj tradiciji, teorije predstavljaju matematičke modele. Ti matematički modeli, budući su dio svijeta koji pokušavaju opisati, imaju inherentnu samoreferenciju izraženu unutar sebe samih, nešto poput

---

4. Program L sigurno nije u stanju predvidjeti pojavljivanje te rečenice, zato jer ju ne može dokazati, tj. ona nije dio tog programa.
5. Dakle, matematički logičar ima slobodnu volju (program ne može predvidjeti sve njegove radnje).
6. Ne postoje dovoljne kvalitativne razlike izmežu matematičkih logičara i ostatka populacije koje bi opravdale vjerovanje da matematički logičari imaju slobodnu volju, a ostatak populacije ne.

Ovaj argument, čak i ako ga se proba shaviti ozbiljno, a ne kao kakvu šalu, ima nekoliko temeljnih nedostataka, prvenstveno u točkama (1) i (6). Ad (1), determinizam uopće ne mora značiti postojanje logičkog programa koji predviđa ljudske radnje. Čak i ako program postoji, pitanje je da li zadovoljava uvjete formalnog sistema. Što je još gore, Lucas smatra da ako je determinizam istinit, ljudski mozak ima građu formalnog sistema. Ad (6), sumnjam da je Lucas proveo ispitivanje kvalitativnih razlika između matematičkih logičara i ostatka populacije da bi mogao tvrditi da takve razlike ne postoje.

aritmetizacije sintakse PA. Dakle, te teorije zadovoljavaju zahtjeve koje postavljaju Gödelovi teoremi. Iz toga možemo zaključiti da su fizikalne teorije ili nepotpune ili nekonzistentne (XIV). Ako pogledamo povijest fizike unazad 500 godina, vidjet ćemo da su bile i nepotpune i nekonzistentne, te da se niti danas ništa nije promijenilo.

Sam Gödel se, nakon dokaza i razrade svojih teorema o nepotpunosti počeo baviti alternativnim aksiomatizacijama osnova matematike. Tražio je nove aksiome za teoriju skupova koji bi bili dovoljno jaki da obuhvate neodlučive tvrdnje standardne Zermelo-Frankelove teorije. Ta nastojanja postala su poznata kao Gödelov program, koji se osobito odnosio na hipotezu o kontinuumu[42]. Gödel je, nakon godina provedenih u traženju novih aksioma, došao do zaključka da se oni neće moći spoznati eksplicitnim definiranjem novih, već samo pojašnjavanjem značenja već postojećih aksioma. Početke znanosti o pojašnjavanju značenja našao je u Husserlovoj fenomenologiji. Nažalost, Gödel ne daje nikakve primjere i metode fenomenologije kao znanosti, osim što kaže da ona nije znanost u klasičnom smislu, već prije "procedura ili tehnika koja bi u nama trebala proizvesti novo stanje svijesti u kojem detaljno opisujemo osnovne koncepte koje koristimo u mišljenju, ili spoznajemo nove, prethodno nepoznate osnovne koncepte"[43].

Iako je u proučavanju fenomenologije proveo više od dvadeset godina, Gödel u tom razdoblju nije objavio niti jedno djelo koje bi imalo veze s tim predmetom. Iz knjige Hao Wanga (15) može se zaključiti da razlog tome

[42] Hipotezu o kontinuumu formulirao je Georg Cantor (1845. - 1918.). Ona govori o veličinama beskonačnih skupova. Specifično: ne postoji skup čija bi veličina bila između skupa prirodnih i skupa realnih brojeva. Dakle, prvi skup koji je veći od skupa $\mathbb{N}$ jest skup $\mathbb{R}$.

1900. David Hilbert je kao prvi od svoja 23 slavna matematička problema naveo dokaz ili opovrgavanje hipoteze o kontinuumu. Drugi je bio apsolutni dokaz konzistentnosti aritmetike.

Znatno kasnije je Paul Cohen (1934. - 2007.) dokazao da je hipoteza o kontinuumu neodlučiva u klasičnoj Zermelo-Frankelovoj teoriji skupova.

Više o hipotezi kontinuuma, Cantoru i Cohenu na (XV).

[43] (9), str 532.

njegovo nezadovoljstvo rezultatima tog istraživanja.

Takav razvoj događaja sigurno je zaslužan za današnje svrstavanje Gödelovih teorema u kategoriju nesretnih zanimljivosti. Zanimljivosti, jer zasigurno nitko ne može poreći njihovu važnost i genijalnost, a nesretnih jer nitko zapravo ne zna što bi dalje učinio sa naizgled tako važnim otkrićima. Čini se da niti Gödel nije znao.

Bog postoji jer je matematika konzistentna, a vrag postoji jer to ne možemo dokazati.

André Weil[44]

[44] (12), str. 1.

7 Literatura

Članci i knjige

1. DAVIS, MARTIN (2003): Na logički pogon, Jesenski i Turk

2. DAVIS, MARTIN (2006): The Incompleteness Theorem, Notices of the AMS, Vol. 53, No. 4

3. DE JONGH, DICK (2006): The Incompleteness Theorems, their Content and their Meaning, Institute for Logic, Language and Computation

4. EDWARDS, PAUL (1967): The Encyclopedia of Philosophy, Vol. 3, Collier - MacMillan Ltd.

5. FITTING, MELVIN (1993-1999): Notes on Incompleteness and Undecidability

6. FLOYD, JULIET i KANAMORI, AKIHIRO (2006): How Gödel Transformed Set Theory, Notices of the AMS, Vol. 53, No. 4

7. FRANZÉN, TORKEL (2006): The Popular Impact of Gödel's Incompleteness Theorem, Notices of the AMS, Vol. 53, No. 4

8. GÖDEL, KURT (2001): O formalno neodlučivim stavcima *Principia Mathematica* i srodnih sustava 1, u NAGEL, ERNST i NEWMAN, JAMES (2001): Gödelov dokaz, KruZak

9. HAUSER, KAI (2006): Gödel's Program Revisited: Part 1 - The Turn to Fenomenology, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 12, No. 4

10. NAGEL, ERNST i NEWMAN, JAMES (2001): Gödelov dokaz, KruZak

11. SHOENFIELD, JOSEPH (1993): Lecture Notes in Logic 1: Recursion Theory, Springer-Verlag

12. VUKOVIĆ, MLADEN (2001): Gödelovi teoremi nepotpunosti, Matematičko - fizički list

13. VUKOVIĆ, MLADEN (2007): Izračunljivost, skripta, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u zagrebu

14. VUKOVIĆ, MLADEN (2004): Matematička logika 1, skripta, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu

15. WANG, HAO (1996): A Logical Journey: From Gödel to Philosophy, MIT Press

Internet stranice

I. http://en.wikipedia.org/wiki/Moritz_Schlick

II. http://en.wikipedia.org/wiki/Rudolf_Carnap

III. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hahn.html

IV. http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell

V. http://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein

VI. http://en.wikipedia.org/wiki/Oskar_Morgenstern

VII. HOLT, JIM (1997): The Loophole - A logician challenges the Constitution, http://linguafranca.mirror.theinfo.org/9802/hyp.html

VIII. http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid

IX. http://en.wikipedia.org/wiki/Frege

X. http://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_North_Whitehead

XI. http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert

XII. http://en.wikipedia.org/wiki/Tarski

XIII. http://en.wikipedia.org/wiki/Gentzen

XIV. HAWKING, STEPHEN (2007): Gödel and the End of Physics, http://www.damtp.cam.ac.uk/strings02/dirac/hawking/

XV. http://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

XVI. http://en.wikipedia.org/wiki/Godel

XVII. http://en.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6del%27s_incompleteness_theorems

XVIII. http://en.wikipedia.org/wiki/Vienna_Circle

XIX. http://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo%E2%80%93Fraenkel_set_theory